3 Fonctions : limite, primitive, équations différentielles

1. Limites de fonctions

Définition 3.1 Comme pour les suites, la limite d'une fonction, si elle existe, est la valeur vers laquelle tend $f(x)$.
On a les notations suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ...$, etc...

Exercice 3.1 En vous aidant d'un tracé de la courbe à la calculatrice, complétez les égalités suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = ...$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = ...$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = ...$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = ...$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = ...$
   En $-\infty$, la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de l'exponentielle.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = ...$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = ...$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = ...$
   En $+\infty$ et $-\infty$, la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction inverse.
   $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = ...$
   $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = ...$
   En 0, la droite $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction inverse.

Propriété 3.1 Les théorèmes concernant les opérations sur les limites et la comparaison (minoration, majoration gendarmes...) sont les mêmes que pour les suites.

Exercice 3.2 En vous aidant des théorèmes vus à propos des limites de suites, déterminez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = ...$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 1\right) = ...$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x)(e^x - 1) = ...$
....
....
....
....
....

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{x} = ...$
....
....
....
....
....

Exercice 3.3 Calculer les limites en 2 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$.
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3.4 On modélise le taux d'équipement des ménages français en internet mobile pour l'année $2007 + x$ par la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{100}{1+9e^{-0,34x}}$

1. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$
....
....
....
....
....
....
....

(b) Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
....
....
....
....
....
....
....

3. Interprétez ces résultats dans le contexte de l'exercice.

....
....
....
....
....
....
....
....

2. Primitives

L'idée est que chercher une primitive, c'est faire "**la marche arrière de la dérivation**".

Exercice 3.5 Le jeu dans cet exercice est de répondre à la question "qui a été dérivé" pour donner ... ?
Les pointillés peuvent être utilisés pour faire du brouillon quand on cherche. On notera F la fonction trouvée. on pourra re-dériver F pour vérifier que l'on retombe bien sur a fonction proposée par l'énoncé.

1. Qui a été dérivé pour donner x^3 ?

....
....
....
....
....
....
....
....

2. Qui a été dérivé pour donner $8x^3 + 15x^2 - 4x + 2$?

....
....
....
....
....
....
....
....

3. Qui a été dérivé pour donner $e^x + 5x$?

....
....
....
....
....
....
....
....

4. Qui a été dérivé pour donner $\frac{-2x}{x^4}$?

....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 3.2 On a vu à l'exercice précédent que la primitive est définie **à une constante additive près**. On parle donc de primitives, au pluriel. On les note par exemple $F(x) + k$.

Exercice 3.6 Déterminer une primitive F de la fonction proposée, on notera k la constante additive.

1. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x + 1$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. $f(x) = 2e^{-0,5x}$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. $f(x) = -3e^x + 4x^2 - x - 1$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
5. $f(x) = (-4x + 6)e^{-x^2+3x-1}$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
6. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3x - 1)$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Équation différentielle de la forme $y' = f$, conditions initiales

Définition 3.2 Une équation différentielle est une équation qui contient des dérivées. Pour la résoudre, on cherche des primitives, puis on utilise les **conditions initiales** pour déterminer la valeur de la constante k.

Exercice 3.7 Déterminer la primitive F (du coup, elle sera unique) de la fonction f satisfaisant la condition initiale donnée.

1. $f(x) = 2x + 1$ et $F(3) = 2$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ et $F(1) = 3$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. $f(x) = 2e^{3x-4} + 1$ et $F(\frac{4}{3}) = 5$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 3.8 Déterminer la primitive F (du coup, elle sera unique) de la fonction f définie par $f(x) = (4x + 2)e^{x^2+x}$ telle que $F(0) = 3$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3.9 On étudie le nombre de truites d'un lac qui a tendance à diminuer. On modélise la population de truites par une fonction N, dérivable sur $[0; +\infty[$, où $N(t)$ est le nombre de truites au bout de t jours. La vitesse d'évolution de la population de truites, assimilée à $N'(t)$, est donnée par $N'(t) = -125e^{-0,05t}$. Déterminer l'expression de $N(t)$ en fonction de t, sachant qu'au début de l'étude 2500 truites ont été recensées.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercice 3.10 Une imprimerie a une capacité de production de 5000 ouvrages par jour.
Le coût marginal par ouvrage, en euros, est donné par $f(q) = -2q + 15 - 10e^{-0,2q}$, où $q \in [0; 5]$ est le nombre d'ouvrages imprimés, en milliers. Les quantités étant très grandes, on assimile le coût marginal à la dérivée du coût total C.
Déterminer l'expression de $C(q)$ en fonction de q, sachant que $C(0) = 3$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. Équations différentielles de la forme $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Propriété 3.3 Les solutions d'une équation différentielle du type $y' = ay$ sont de la forme $f(x) = ke^{ax}$.

Démonstration Nous définirons au chapitre suivant la fonction logarithme népérien, notée $ln(x)$, qui est une primitive de la fonction inverse $\frac{1}{x}$.
Ainsi, on a $ln'(x) = \frac{1}{x}$.
Par composition, si y est une autre fonction, la dérivée de $ln(y)$ est $ln'(y) = \frac{y'}{y}$.
On a donc $y' = ay \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a \Leftrightarrow ln'(y) = a \Leftrightarrow ln(y) = ax + b$, où b est la constante additive issue de la primitivation.
Or la fonction ln est aussi la fonction réciproque (la "marche arrière") de l'exponentielle : on a $ln(e^x) = x$ et $e^{ln(x)} = x$.
Ainsi $ln(y) = ax + b \Leftrightarrow e^{ln(y)} = e^{ax+b} \Leftrightarrow y = e^{ax+b} \Leftrightarrow y = e^{ax+b}$
En notant $k = e^b$, il vient : $y = e^{ax+b} \Leftrightarrow y = e^{ax} \times e^b \Leftrightarrow y = e^b \times e^{ax} \Leftrightarrow y = k \times e^{ax}$

Exercice 3.11 Résoudre les équations différentielles suivantes (on notera k la constante issue de la primitivation).

1. $y' = 2y$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. $y' = -y$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercice 3.12 On injecte à un malade une dose de $2cm^3$ d'un médicament. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang par une fonction f, dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifiant pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = -0,08f(t)$$

Où $f(t)$ représente la quantité de médicament présente dans le sang, exprimée en cm^3, t heures après l'injection.

1. Déterminer l'expression de $f(t)$ en fonction de t
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Déterminer, à 10^{-2} près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Propriété 3.4 Une équation différentielle $y' = ay + b$ admet une solution particulière constante du type $u(x) = \alpha$, où α est un nombre réel à déterminer.
Après avoir déterminé α, les solution de l'équation s'écrivent $f(x) = ke^{ax} + \alpha$, où la constante k est déterminée par les conditions initiales.

Exercice 3.13 On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 6$

1. Écrire cette équation sous la forme $y' = ay + b$.
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Rechercher une solution particulière constante de cette équation. On notera α cette solution.
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Écrire les solutions de l'équation différentielle, en notant k la constante multiplicative.
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 3.14 Résoudre les équations différentielles suivantes (on notera k la constante issue de la primitivation).

1. $4y' + 3y = 0$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. $-3y + 5y' = 0$
   ....
   ....
   ....

Exercice 3.15 Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale indiquée.

1. (E) : $y' + y = 0$ et $f(0) = 1$

2. (E) : $3y' - y = 0$ et $f(-1) = 3$

Exercice 3.16 A l'instant $t = 0$, on place 20 grammes d'une substance soluble dans de l'eau. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on note $f(t)$ la quantité de substance dissoute, exprimée en grammes, au bout de t minutes.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,14y + 1,4$

1. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction u définie par $u(t) = \alpha$ soit solution de (E).

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t.

4. Déterminer, au gramme près, la quantité de substance dissoute au bout de dix minutes.